III MATRIČNA ANALIZA

1. Opšte

Metoda sila i metoda deformacije su dvije osnovne metode i u klasičnoj i u matričnoj formulaciji. U klasičnoj formulaciji dati statički sistem se posmatra kao cjelina (system approache). U proračunu se usvaja ona metoda koja je pogodnija za analizu datog sistema. Izbor metode zavisi od statičke ili deformacijske neodređenost nosača. Ako je statička neodređenost manja bira se metoda sila ili obrnuto.
U matričnoj formulaciji metode sila i metode deformacija osnovu čini štap kao element sistema (element approache). Sistem je diskretan, sastavljen od pojedinih štapova – elemenata sistema koji su međusobno vezani u diskretnim tačkama čvorovima sistema. Analiza diskretnog sistema se sastoji od sljedeća dva dijela:

1) Analiza elementa (štapa),
2) Analiza strukture (sistema elemenata-štapova).

U analizi elementa polazi se od osnovnih jednačina teorije štapa i uspostavlja veza između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u čvorovima na krajevima elemenata. U analizi strukture, odnosno, sistema štapova kao cjeline polazi se od veza između sila i pomjeranja koje važe za pojedine elemente. Na osnovu tih relacija formiraju se odgovarajuće jednačine za strukturu štapova uz vođenje računa **o vezama u čvorovima**, **uslovima ravnoteže i načinu oslanjanja**. U tu svrhu koriste se:

1) Uslovi kompatibilnosti čvorova,
2) Uslovi ravnoteže čvorova i
3) Uslovi oslanjanja sistema.

U dobijenom sistemu jednačina nepoznate su parametri u čvorovima. To mogu biti generalisane sile (sile i momenti) i/ili generalisana pomjeranja (komponentalna pomjeranja i obrtanja). U zavisnosti od izbora nepoznatih u analizi postoje tri metode:

- Metoda deformacije
- Metoda sila
- Mješovita ili hibridna metoda.

Zbog svoje opštosti i jednostavnosti najviše je u primjeni metoda deformacije, pa je ona predmet naših razmatranja.
Nepoznate u metodi deformacije su komponente pomjeranja u i v i obrtanja čvorova φ.
Uvodimo pojmove:

R – vektor sila
q – vektor pomjeranja
k – matrica krutosti

Za svaki štap može se napisati sljedeća veza ove tri veličine:

$$R = k\,q \tag{1}$$

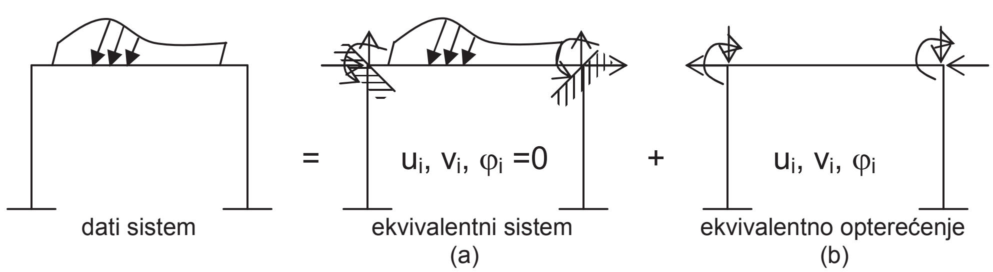
Na osnovu analize strukture (sistema štapova) i formiranih matrica krutosti pojedinih štapova formira se matrica krutosti sistema štapova K*:

$$K^*\,q^* = S^* \tag{2}$$

gdje su:
K* - matrica krutosti sistema elemenata
q* - vektor nepoznatih parametara pomjeranja
S* - vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja sistema.

Iz navedenog sistema jednačina (2) određuju se nepoznati parametri pomjeranja q*, a zatim se iz relacije (1) određuju sile na krajevima štapova, odnosno čvorovima elemenata.

Na osnovu principa superpozicije uticaja, uticaji u sistemu se računaju na način koji je dat na slici (1) kao zbir uticaja ekvivalentnog sistema koji je deformacijski određen i uticaja usled ekvivalentnog opterećenja.



Slika 1.

Na slici 1a štapovi su opterećeni opterećenjem usled kojeg se određuju reaktivne sile i momenti uz pretpostavku da su u_i, v_i, φ_i =0. Odnosno, reaktivne sile i momenti su određeni u sistemu u kojem se čvorovi ne pomjeranju i presjeci ne obrću. Sistem na slici 1b opterećen je u čvorovima i to opterećenjem koje je po intenzitetu jednako opterećenju u čvorovima sistema ali sa promijenjenim znakom. Ovo opterećenje se naziva ekvivalentno opterećenje.
Ovaj stav predstavlja osnovu koncepta matrične analize metodom deformacije. On praktično znači da se pri određivanju pomjeranja i obrtanja čvorova sistema spoljašnji uticaji duž pojedinih štapova zamjenjuju ekvivalentnim opterećenjem na njegovim krajevima, odnosno, u čvorovima sistema što je znatno pogodnije za analizu od stvarno zadatog opterećenja. Ekvivalentno opterećenje se određuje u kinematički određenom sistemu i jednako je negativnim vrijednostima reakcija oslonaca totalno uklještenih štapova.
Znači u analizi, na nivou elementa, pored veze generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u čvorovima elementa koja se uspostavlja preko matrice krutosti elementa, određuje se i vektor ekvivalentnog opterećenja elementa.

1.1. Kinematička (deformacijska) neodređenost sistema

Ukupan broj nepoznatih, međusobno nezavisnih parametara pomjeranja, predstavlja kinematički ili deformacijsku neodređenost sistema. U slučaju ravnih sistema svaki čvor ima dvije komponente pomjeranja, stoga će k čvorova u sistemu imati **2k** nepoznatih komponentalnih pomjeranja. U čvoru sa kruto vezanim štapovima, prema definiciji krute veze, svi kruto vezani štapovi obrću se za isti ugao, slika 2, tako da je ukupan broj nepoznatih uglova obrtanja jednak broju grupa kruto vezanih štapova u sistemu, **m**.

Slika 2.

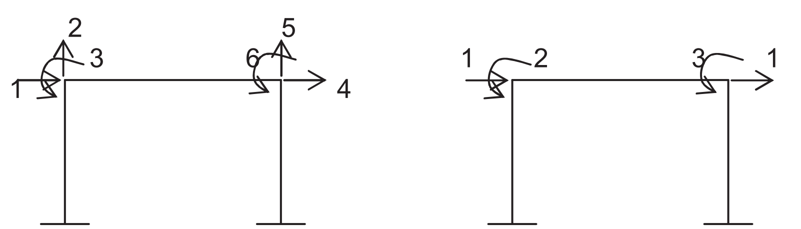
Ukupan broj nezavisnih parametara pomjeranja sistema umanjuje se za broj spriječenih ili zadatih pomjeranja u osloncima. Ukupan broj deformacijski nepoznatih određuje se pomoću izraza (3).

$$n_t = (2k - z_o) + m \qquad (3)$$

Izrazom (3) definisan je broj deformacijski nepoznatih za slučaj kada se ne zanemaruje uticaj normalnih sila na deformaciju sistema. U približnoj metodi deformacija uticaj normalnih sila na deformaciju nosača se zanemaruje, iz tog razloga broj deformacijski nepoznatih se određuje primjenom izraza (4).

$$n_t = [2k - (z_o + z_s)] + m \qquad (4)$$

Na slici 3 prikazan je način određivanja deformacijski neodređenih veličina za oba navedena slučaja. U slučaju kada uticaj normalnih sila nije zanemaren (tačna metoda deformacija) nepoznate za dati primjer su pomjeranja 1,2,3,4,5 i 6. Za slučaj kada je uticaj normalnih sila na deformaciju nosača zanemaren nepoznata pomjeranja su 1, 2 i 3.



tačna metoda deformacije

približna metoda deformacije

$n_t = (2k - z_o) + m = 2+(2x4-4)=6$
nepoznate: 1, 2, 3, 4, 5 i 6

$n_p = (2k - z_o - z_s) + m = 2+(2x4-4-3)=3$
nepoznate: 1, 2 i 3

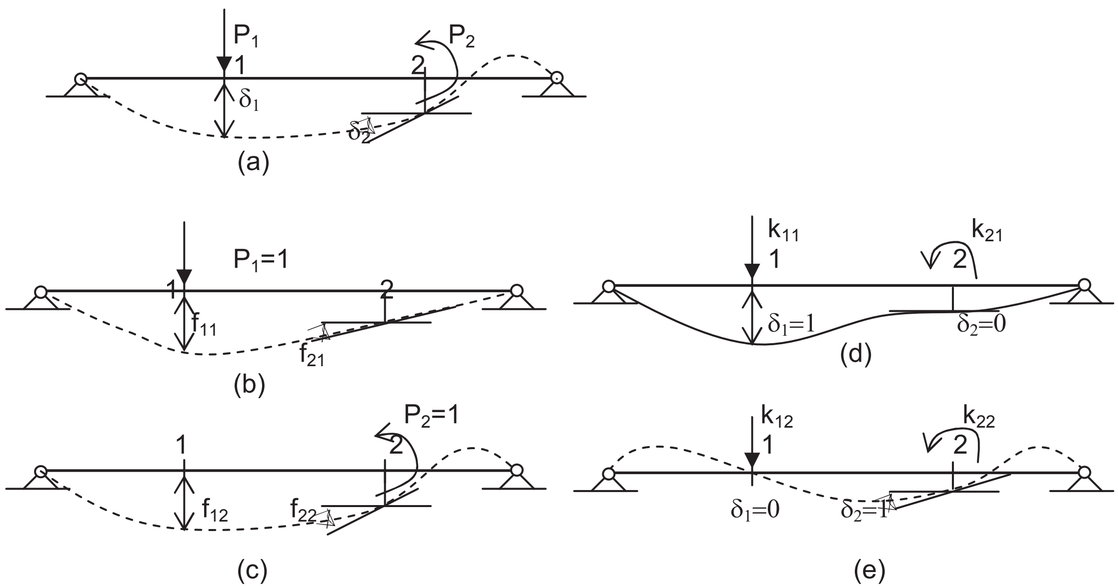
Slika 3.

1.2. Veze između sila i pomjeranja

Za elastično tijelo definišu se dva pojma:

- Matrica fleksibilnosti
- Matrica krutosti

Koje predstavljaju osnovne pojmove matrične analize linijskih nosača.
Posmatraćemo prostu gredu opterećenu silom P_1 u tački 1 i momentom P_2 u tački 2, kako je to prikazano na slici 4. Nosač je idealno elastičan a pomjeranja δ_1 i δ_2 su male veličine.



Slika 4.

Primjenom superpozicije uticaja, slike 4b i 4c, pomjeranja napadnih tačaka generalisanih sila P_1 i P_2 , slika 4a, mogu se sračunati na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

f_{ij} , i,j=1,2 su koeficijenti gipkosti ili koeficijenti fleksibilnosti nosača koji odgovaraju silama P_i (i=1,2).

Za slučaj kada je P_1=1 i P_2=0, slika 4b, veze (5) mogu da se napišu u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sijedi:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix}$$

Za slučaj kada je P_2=1 i P_1=0, slika 4c, veze (5) mogu se napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slijedi:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}$$

Geometrijsko značenje ovih koeficijenata dato je na slikama 4b i 4c. Koeficijenti f_{11} i f_{21} predstavljaju vertikalno pomjeranje tačke 1 i obrtanje tačke 2, usled dejstva sile P_1=1, slika 4b, dok koeficijenti f_{12} i f_{22} predstavljaju vertikalno pomjeranje u tački 1 i obrtanje u tački 2, usled dejstva momenta P_2=1.
Veze između sila i pomjeranja date su u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

k_{ij} , i,j=1,2 su koeficijenti krutosti nosača koji odgovaraju pomjeranjima δ_1 i δ_2.
Geometrijsko značenje koeficijenata k_{ij} dato je na slikama 4d i 4e. Koeficijenti k_{11} i k_{21} predstavljaju silu u tački 1 i moment u tački 2 koji nastaju usled pomjeranja δ_1=1 i δ_2=0, dok koeficijenti k_{12} i k_{22} predstavljaju silu u tački 1 i moment u tački 2 kada je obrtanje δ_2=1 i δ_1=0:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & f_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & f_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix}$$

Veze pomjeranja i sila (5) mogu da se uopšte za proizvoljan nosač na koji djeluje proizvoljan sistem sila Ri u tačkama i =1,2,...,n i odgovarajućim generalisanim pomjeranjima q_i u tačkama i=1,...,n:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_i \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1j} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & \dots & f_{ij} & \dots & f_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nj} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Skraćeni matrični oblik:

$$q = F\,R \tag{8}$$

F - matrica fleksibilnosti
Elementi j-te kolone matrice fleksibilnosti F predstavljaju generalisana pomjeranja q_i, i=1,...,n usled dejstva jedinične sile R_j=1, dok su sve ostale sile jednake nuli.
Na sličan način, zavisnost sila i pomjeranja uopšte za proizvoljan nosač može se prikazati u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_j \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

Ili u skraćnom matričnom obliku

$$R = k\,q \tag{10}$$

Elementi j-te kolone mateice k predstavljaju generalisane sile R_i u tačkama i=1,...,n usled jediničnog generalisanog pomjeranja q_j=1 dok su sva ostala generalisana pomjeranja jednaka nuli.
Na osnovu Maxwell-ovog stava o uzajamnosti pomjeranja slijedi da je matrica fleksibilnosti simetrična, slijedi:

$$f_{ij} = f_{ji}$$

odnosno: $F=F^T$

Iz navedene relacije vidi se da je $F=K^{-1}$ pa se zaključuje da je i matrica krutosti, takođe, simetrična.
Algoritam za proračun uticaja u nosaču, primjenom matrične analize, ima sljedeće korake:

1. Formiranje matrica krutosti svih elemenata-štapova zadatog nosača,
2. Određivanje vektora ekvivalentnog čvornog opterećenja za sve štapove koji su opterećeni, Q,
3. Formiranje matrica krutosti štapova u globalnom koordinatnom sistemu,
4. Formiranje matrice krutosti sistema štapova K* i vektora slobodnih članova S*,
5. Određivanje vektora nepoznatih pomjeranja sistema štapova q*,
6. Određivanje nepoznatih sila na krajevima štapova R.

Prikazaćemo matričnu analizu za:

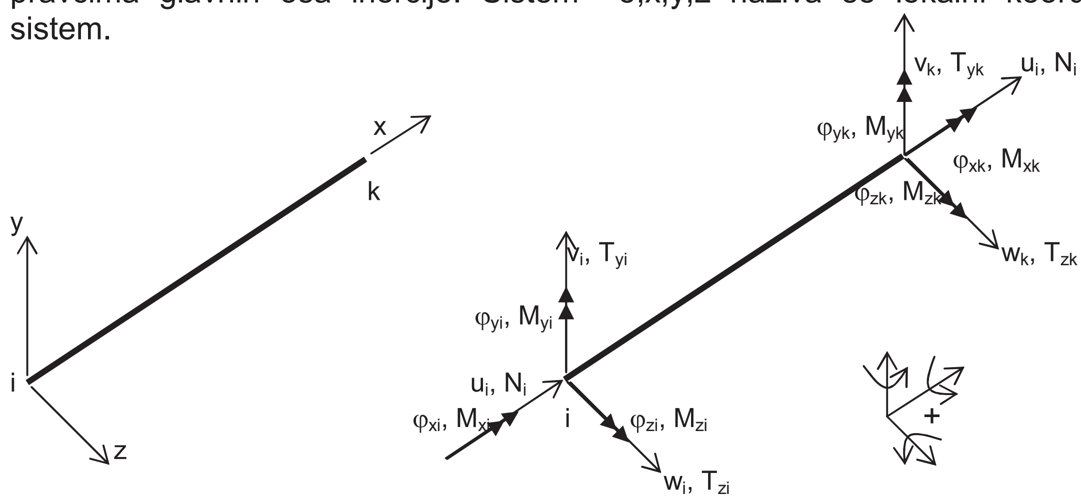
- Ravne linijske nosače (puni i rešetkasti nosači)
- Prostorne nosače (puni i rešetkasti nosači)
- Roštilje.

2. Matrična analiza štapa

U matričnoj analizi štap je osnovni element. Najjednostavniji je model pravog prizmatičnog štapa sa čvorovima na njegovim krajevima koji se razmatra u dekartovom koordinatnom sistemu.
Složeno naponsko stanje štapa u ravni može se razdvojiti na: aksijalno naprezanje, savijanje i torziju. Za aksijalno naprezanje i savijanje prikazaće se postupak izvođenja matrice krutosti direktnim i varijacionim postupkom, dok će za matrica krutosti torziju biti izvedena direktnim postupkom.

2.1. Osnovne nepoznate, konvencija i oznake

Na slici 5 prikazan je prav prizmatičan štap proizvoljnog poprečnog presjeka dužine l. Krajevi štapa su označeni sa i i k. Postavljen je Descartes-ov pravougli koordinatni sistem x,y,z tako da se osa x poklapa sa osom štapa a ose y i z sa pravcima glavnih osa inercije. Sistem o,x,y,z naziva se lokalni koordinatni sistem.



Slika 5.

Osnovne kinematičke veličine u čvorovima su generalisana pomjeranja u, v, w u pravcima x, y, z i obrtanja φ_x, φ_y, φ_z oko osa x,y,z, respektivno. Konvencija o pozitivnom smjeru generalisanih pomjeranja i generalisanih sila data je na slici 5.
Za generalisana pomjeranja u čvorovima upotrebljavaju se i nazivi parametri pomjeranja ili stepeni slobode. Broj stepeni slobode čvora jednak je broju generalisanih pomjeranja čvorova, dok je broj stepeni slobode štapa jednak zbiru stepeni slobode u čvorovima. Vektori pomjeranja krajeva štapa i i k je:

$$q_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} & \varphi_{zi} \end{bmatrix}$$

$$q_k^T = \begin{bmatrix} u_k & v_k & w_k & \varphi_{xk} & \varphi_{yk} & \varphi_{zk} \end{bmatrix}$$

Vektor pomjeranja štapa može se prikazati na sljedeći način:

$$q^T = \begin{bmatrix} q_i^T & q_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^T$$

$$q^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \varphi_{xi} & \varphi_{yi} & \varphi_{zi} & u_k & v_k & w_k & \varphi_{xk} & \varphi_{yk} & \varphi_{zk} \end{bmatrix}^T$$

n-broj stepeni slobode štapa.

Osnovne statičke veličine u čvorovima prostornog štapa su generalisane sile N_x, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z. Generalisane sile u čvorovima i i k prikazuju se kao komponente vektora sila R_i i R_k:

$$R_i^T=[N_i, T_{yi}, T_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}]$$

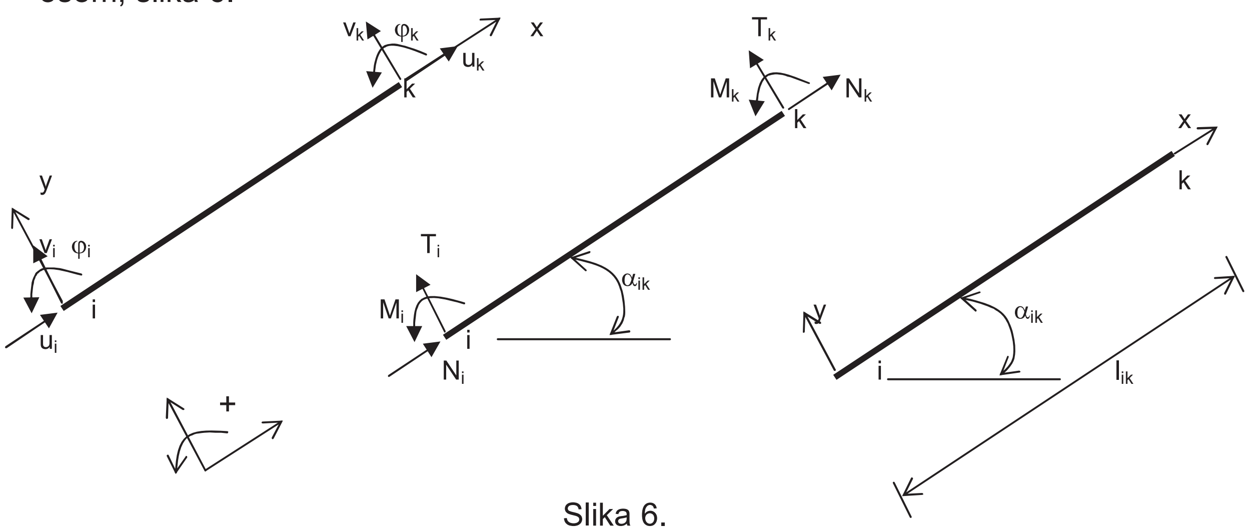
$$R_k^T=[N_k, T_{yk}, T_{zk}, M_{xk}, M_{yk}, M_{zk}] \tag{11}$$

Vektor generalisanih sila štapa može se napisati u sljedećem obliku:

$$R^T= [R_i^T \; R_i^T] = [R_1, R_2, ..., R_n]$$

$$R^T =[N_i, T_{yi}, T_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, N_k, T_{yk}, T_{zk}, M_{xk}, M_{yk}, M_{zk}] \tag{12}$$

Za štap u ravni, lokalni koordinatni sistem je xoy, pri čemu se osa x poklapa sa osom, slika 6.



Slika 6.

Subvektori vektora pomjeranja su q_i^T i q_k^T:

$$q^T = \begin{bmatrix} q_i^T & q_k^T \end{bmatrix}^T$$

gdje su:

$$q_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & \varphi_i \end{bmatrix} \qquad q_k^T = \begin{bmatrix} u_k & v_k & \varphi_k \end{bmatrix}$$

Slijedi da su komponente vektora pomjeranja za štap u ravni :

$$q^T = \begin{bmatrix} q_i^T & q_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & \varphi_i & u_k & v_k & \varphi_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

Vektor sila na krajevima štapova je definisan sa:

$$R_i = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \end{bmatrix} \qquad R_k = \begin{bmatrix} N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

dok se vektor sila štapa sastoji od subvektora sila u čvorovima štapa:

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

Veze između vektora generalisanih sila R i vektora generalisanih pomjeranja q dat je sa :

$$R = k\,q$$

Ili u razvijenom matričom obliku :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_j \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

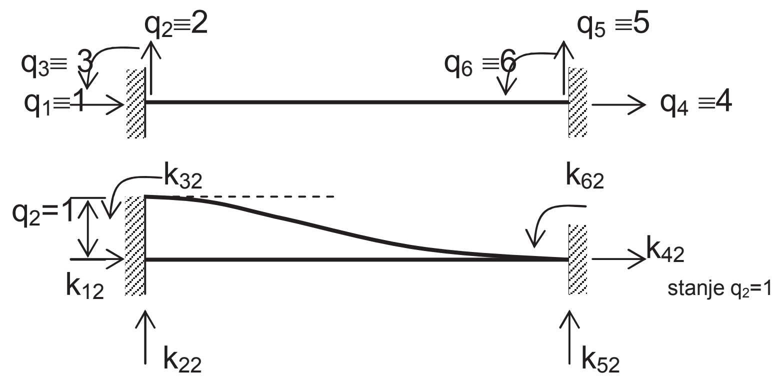
Matrica kojom se uspostavlja neposredna veza između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa naziva se MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA. Matrica krutosti štapa je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu $k_{ij}=k_{ji}$ što je posledica Maxwell-ovog stava o uzajamnosti pomjeranja.

Ako je $q_j=1$ a $q_i=0$ za $i \neq j$ tada se iz relacije (14) slijedi:

$$\begin{bmatrix} R_1 & \dots & R_i & \dots & R_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k_{1j} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{nj} \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

odnosno, element k_{ij} matrice krutosti štapa jednak je generalisanoj sili R_i koja nastaje usled generalisanog pomjeranja $q_j=1$, pri čemu su sva ostala pomjeranja jednaka nuli. Ovo predstavlja geometrijsko-statičko tumačenje elementa matrice krutosti štapa i put za određivanje elemenata matrice krutosti. Ovaj način

određivanja matrice krutosti štapa naziva se **direktan postupak ili direktna metoda**.
Na slici 7 prikazan je primjer određivanja članova matrice krutosti štapa u ravni za slučaj kada je $q_2=1$ i $q_1= q_3= q_4= q_5= q_6=0$. Reakcije obostrano uklještenog štapa predstavljaju članove druge kolone matrice krutosti štapa i-k.



Slika 7.

$$q_2=1, \quad q_1=q_3=q_4=q_5=q_6=0$$

Iz (14) slijedi :

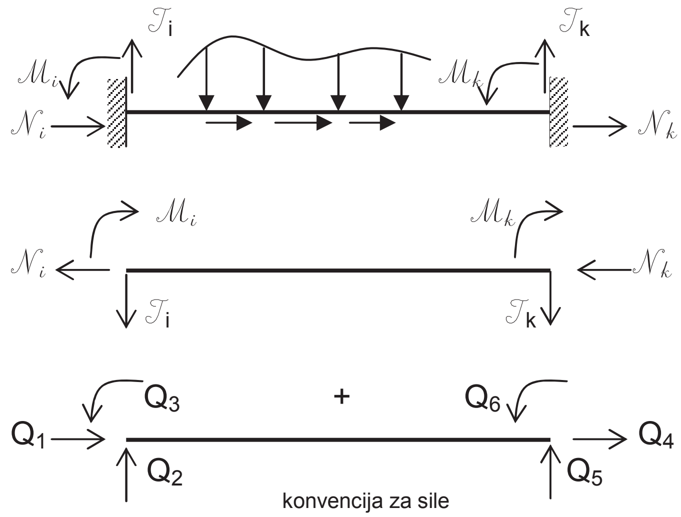
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \\ k_{62} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Matrica krutosti štapa je kvadratna matrica reda nxn, gdje je n broj stepeni slobode pomjeranja elementa. Matrica k je simetrična matrica za koju ne postoji inverzna matrica, iz razloga što su tri komponente sila na krajevima štapa međusobno nezavisne a druge tri se mogu odrediti iz uslova ravnoteže (linearno zavisne) štapa.

2.2. Vektor ekvivalentnog opterećenja

Vektor ekvivalentnog opterećenja čine negativne vrijednosti reakcija krajeva totalno uklještenog štapa usled zadatog opterećenja koje djeluje na štap. Zadato opterećenje može biti raspodijeljeno opterećenje p i m, koncentrisane sile i momenti P, M, temperaturna promjena t i temperaturna razlika Δt.
Koncentrisano opterećenje na krajevima štapa kojim se zamjenjuju spoljašnji uticaji koji djeluju duž ose štapa naziva se EKVIVALENTNO OPTEREĆENJE. Za komponente ekvivalentnog opterećenja (sile i momenti) u čvorovima štapa važi

ista konvencija kao i za generalisane sile, slika 8. Na slici 8 je prikazan postupak određivanja ekvivalentnog opterećenja.



Slika 8.

Vektor ekvivalentnog opterećenja za primjer dat na slici 8 je:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathcal{N}_i \\ \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{N}_k \\ \mathcal{T}_k \\ \mathcal{M}_k \end{bmatrix} \tag{17}$$

2.3. Direktan postupak određivanja matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja

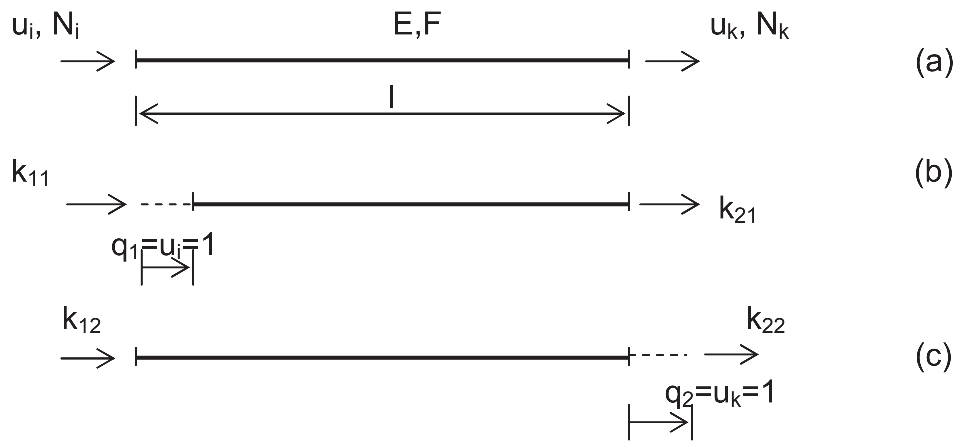
Naponsko stanje u ravni razdvajamo na aksijalno naprezanje i savijanje silama u ravni xoy. Ukupno naprezanje dobijamo superpozicijom ova dva naprezanja.

2.3.1. Aksijalno naprezanje štapa

Štap koji je u stanju aksijalnog naprezanja prikazan je na slici 9a. Geometrijske i materijalne karakteristike štapa su dužina štapa l, površina poprečnog presjeka F i modul elastičnosti E. Parametri pomjeranja u čvorovima i i k su pomjeranja u pravcu ose štapa u_i i u_k pa element ima dva stepena slobode pomjeranja, po jedan u svakom čvoru. Generalisane sile u čvorovima su aksijalne sile N_i i N_k.
Za

$$R = \begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix} \tag{18}$$

koristeći izraz (14) dobija se:
$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix} \tag{19}$$



Slika 9.

Primjenomi geometrijsko-statičkog tumačenja, slike 9b i 9c, kolone matrice krutosti se mogu dobiti na sljedeći način:

a) za slučaj kada je q_1=1 i q_2=0 (slika 9b) iz (19) slijedi da je :

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Kada je $q_1 = u_i = 1$ tada je promjena dužine štapa $\Delta l = u_i = 1$. Na osnovu promjene duđine štapa mogu se sračunati dilatacija, normalni napon i normalna sila :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{l} \qquad , \quad \sigma = E\varepsilon = \frac{E}{l}$$
$$N = F\sigma = FE\varepsilon = \frac{EF}{l}$$

Kada se vrijednost normalne sile ubaci u veze sila i pomjeranja (20), vodeći računa o pozitivnoj konvenciji za sile, dobija se :

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} \\ -\dfrac{EF}{l} \end{bmatrix}$$

b) za slučaj kada je q_2=1 i q_1=0 (slika 9c):

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix}$$

s obzirom da važi:

$$N = F\sigma = FE\varepsilon = \frac{EF}{l}$$

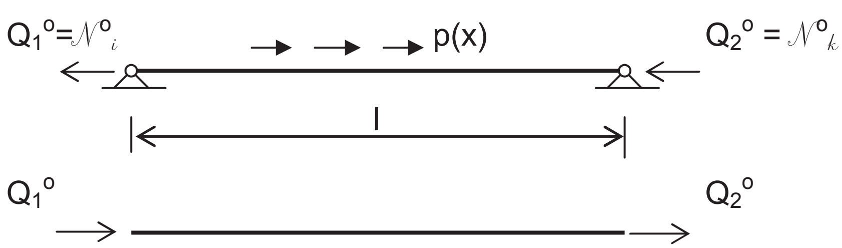
slijedi da je:

$$\begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{EF}{l} \\ \dfrac{EF}{l} \end{bmatrix}$$

Matrica krutosti aksijalno napregnutog štapa je :

$$k = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Vektor ekvivalentnog opterećenja može nastati od opterećenja duž ose štapa i uticaja temperature. Na slici 10 prikazan je način određivanja vektora ekvivalentnog opterećenja. Nosač sa slike je jedan put statički neodređen i za određivanje reakcija $\mathcal{N}^o_i$ i $\mathcal{N}^o_k$ može se primijeniti metoda sila.



Slika 10.

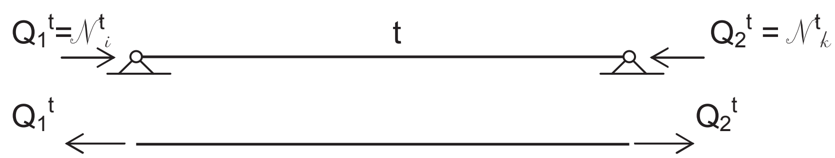
Vektor ekvivalentnog opterećenja je :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} N^o{}_i \\ N^o{}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^t{}_i \\ N^t{}_k \end{bmatrix} \tag{22}$$

Za slučaj kada je opterećenje ravnomjerno raspoređeno duž ose štapa, $p(x)=p_o=const$, vektor ekvivalentnog opterećenja je :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{p_o l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Primjenom metode sila određuju se reakcije oslonaca usled dejstva temperature koje predstavljaju članove vektora ekvivalentnog opterećenja Q, slika 11.



Slika 11.

Vektor ekvivalentnog opterećenja usled dejstva temperaturne promjene t duž ose štapa konstantnog poprečnog presjeka je:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = EF\alpha_t t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Ekvivalentno opterećenje za proizvoljno opterećen štap sa promjenljivim poprečnim presjekom određuje se primjenom metode sila. Štap, slika 11, koji je obostrano nepokretno oslonjen je jedan put statički neodređen.

2.3.2. Savijanje u ravni

Štap dužine l konstantnog poprečnog presjeka izložen je savijanju u ravni xoy. Moment inercije presjeka je I, dok je modul eleastičnosti materijala E. Generalisana pomjeranja su poprečna pomjeranja v_i i v_k i obrtanja krajeva štapa φ_i i φ_k što znači da element ima četiri stepena slobode pomjeranja, po dva u svakom čvoru. Konvencija o pozitivnom znaku za sile i pomjeranja dat je na slici 12.

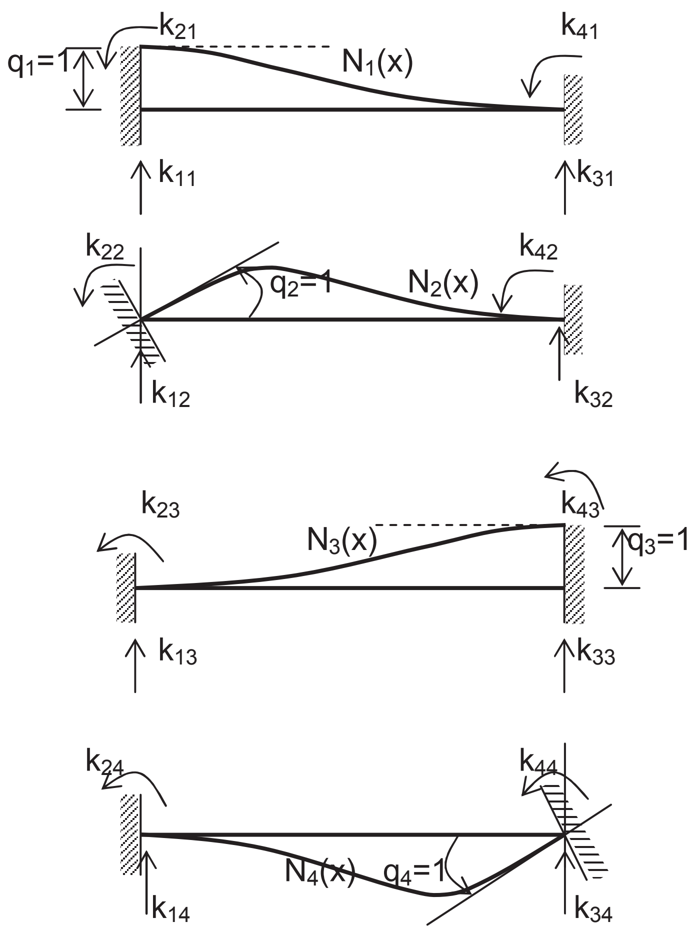
Slika 12.

Vektor generalisanih sila je dat u sljedećem obliku:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

dok je vektor generalisanih pomjeranja za štap napregnut na savijanje definisan sa:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$



Slika 13.

Matrica krutosti štapa je reda nxn, odnosno, za naš problem reda 4x4 :

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

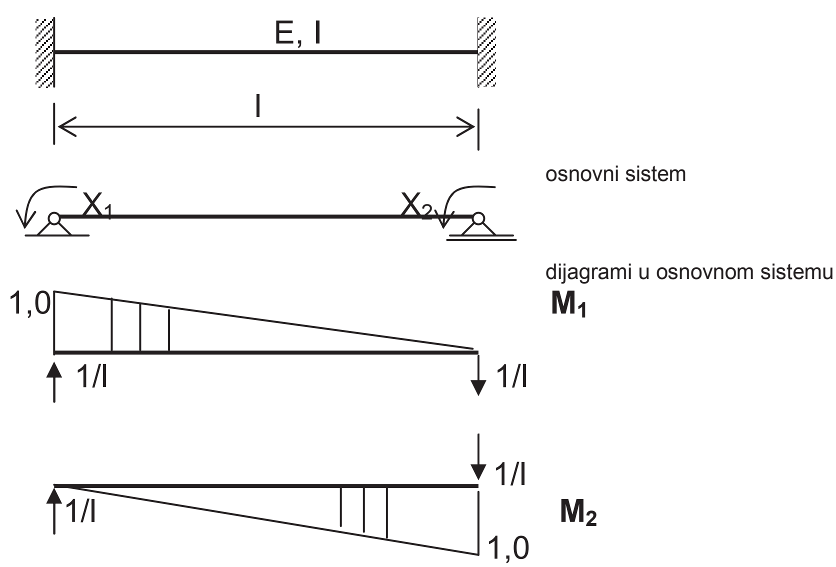
Zbog simetrije matrice krutosti $k_{ij}=k_{ji}$.
Statičko geometrijsko značenje elemenata matrice krutosti štapa izloženog na savijanje u ravni xoy dato je na slici 13.
Pokazano je da se koeficijenti k_{ij}, i,j=1,2,3,4 mogu odrediti kao reakcije obostrano uklještenog štapa usled jediničnih pomjeranja i obrtanja njegovih krajeva. S obzirom da se radi o savijanju u ravni obostrano uklješten štap je dva puta statički neodređen, slika 14, i može se jednostavno riješiti primjenom metode sila. Uslovne jednačine metode sila u tom slučaju su:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1c} = 0$$
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2c} = 0$$

gdje su koeficijenti I slobodni članovi ovih jednačina definisani sa:

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \quad \text{za i,k=1,2}$$
$$\delta_{ic} = -\sum_j C_{ij} c_j$$

M_i, M_k, C_{ji} su momenti i reakcije oslonca od nepoznatih X_i=1 a c_j zadata pomjeranja ili obrtanja oslonaca.



Slika 14.

Za slučaj kada se radi o štapu konstantnog poprečnog presjeka EI =const, koeficijenti uz statički nepoznate i slobodni članovi uslovnih jednačina metode sila su:

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

$$EI\delta_{1c} = EI\delta_{2c} = -EI\frac{1}{l}$$

Rješenja X_1 i X_2, odnosno, reakcije momenta punog uklještenja su:

$$X_1 = EI\frac{6}{l^2} \qquad X_2 = EI\frac{6}{l^2}$$

Vertikalne reakcije mogu se odrediti primjenom opšteg izraza metode sile za određivanje reakcija, primjenom principa superpozicije uticaja, ili, iz uslova ravnoteže štapa:

$$T_1 = -T_2 = EI\frac{12}{l^3}$$

Na ovaj način određeni su elementi prve kolone matrice krutosti koji su jednaki vrijednostima dobijenih reakcija:

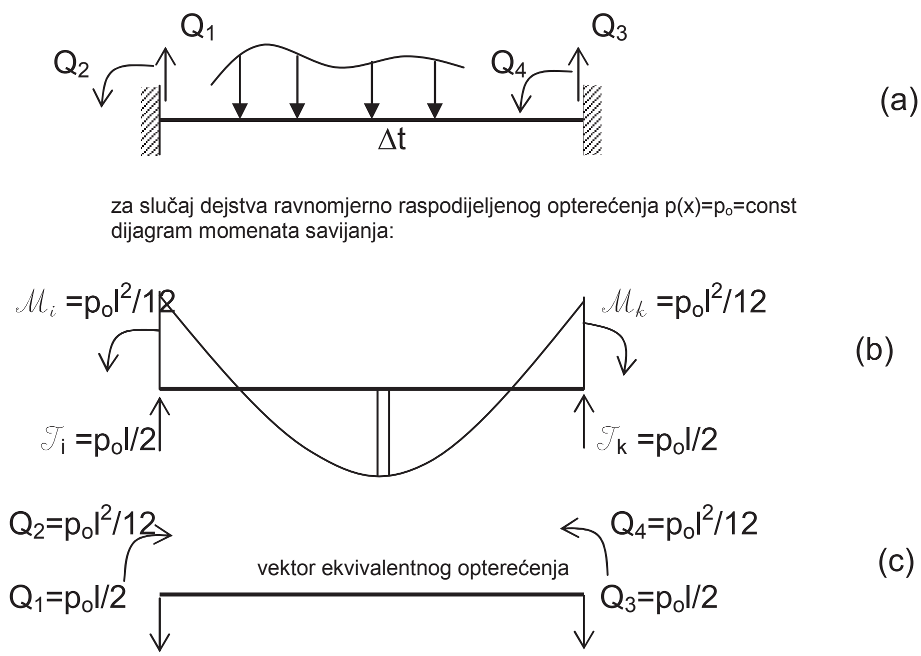
$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 \\ 6l \\ -12 \\ 6l \end{bmatrix}$$

Sličnim razmatranjem mogu se odrediti i preostale tri kolone matrice krutosti. Za slučaj kada je q_2=1, q_1=q_3=q_4=0 kao reakcije punog uklještenja dobijaju se elementi druge kolone matrice krutosti. Kada je q_3=1, q_1=q_2=q_4=0 dobijaju se elementi treće kolone matrice krutosti kao reakcije punog uklještenja za dato pomjeranje, dok za slučaj kada je q_4=1, q_1=q_2=q_3=0 dobijene reakcije punog uklještenja predstavljaju elemente četvrte kolone matrice krutosti.
Matrica krutosti štapa opterećenog na čisto savijanje ima sljedeći oblik:

$$k = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Komponente vektora ekvivalentnog opterećenja jednake su negativnim vrijednostima reakcija totalno uklještenog štapa usled zadatih spoljašnjih uticaja koji mogu biti opterećenje upravno na osu štapa i temperaturna razlika, slika 15a. Vektor ekvivalentnog opterećenja za slučaj dat na slici 15a definisan je sa :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{T}_k \\ \mathcal{M}_k \end{bmatrix}_o - \begin{bmatrix} \mathcal{T}_i \\ \mathcal{M}_i \\ \mathcal{T}_k \\ \mathcal{M}_k \end{bmatrix}_{\Delta t} \tag{25}$$



Slika 15.

Ukoliko na štap djeluje ravnomjerno raspodijeljeno opterećenje intenziteta p_o, slika 15b, komponente ovog vektora mogu se odrediti primjenom metode sila, usvajanjem osnovnog sistem datog na slici 14, i proračunom koeficijenata i slobodnih članova uslovnih jednačina primjenom relacija :

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI_{ik}} dx \qquad \delta_{io} = \int_0^l \frac{M_i M_o}{EI_{ik}} dx$$

za i,k=1,2

Za štap konstantnog poprečnog presjeka koeficijenti i slobodni članovi jednačina metode sila su:

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \int_0^l M^2{}_1 dx = \int_0^l M^2{}_2 = \frac{l}{3}$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^l M_1 M_2 dx = -\frac{l}{6}$$

$$EI\delta_{1o} = \int_0^l M_1 M_o dx = -\frac{p_o l^3}{24} \qquad EI\delta_{2o} = \int_0^l M_2 M_o dx = \frac{p_o l^3}{24}$$

Uslovne jednačine glase:

$$\frac{l}{3}X_1 - \frac{l}{6}X_2 - \frac{p_o l^3}{24} = 0 \qquad -\frac{l}{6}X_1 + \frac{l}{3}X_2 + \frac{p_o l^3}{24} = 0$$

Rješenja navedenih jednačina su:

$$X_1 = \frac{p_o l^2}{12} \qquad X_2 = -\frac{p_o l^2}{12}$$

dok se vertikalne reakcije oslonaca mogu odrediti na način kako je to opisano na starni 17:

$$T_1 = T_2 = \frac{p_o l}{2}$$

Vodeći računa o pozitivnoj konvenciji za sile vektor ekvivalentnog opterećenja je :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_o \dfrac{l}{2} \\ -p_o \dfrac{l^2}{12} \\ -p_o \dfrac{l}{2} \\ p_o \dfrac{l^2}{12} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Za slučaj kada na štap djeluje temperaturna razlika Δt, u gore navedenim uslovnim jednačinama mijenjaju se slobodni članovi :

$$\delta_{it} = \int_0^l M_i \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dx$$

Za EI=const slobodni članovi su:

$$EI\delta_{1t} = -EI\delta_{2t} = EI\alpha_t \frac{\Delta t l}{2h}$$

Uslovne jednačine i rješenja jednačina data su sa:

$$\frac{l}{3}X_1 - \frac{l}{6}X_2 + EI\alpha_t \frac{\Delta t l}{2h} = 0$$

$$-\frac{l}{6}X_1+\frac{l}{3}X_2-EI\alpha_t\frac{\Delta tl}{2h}=0$$

čija su rješenja $\quad X_1=-X_2=EI\alpha_t\frac{\Delta t}{h}$

Slijedi da su: $\quad T_1=T_2=0$

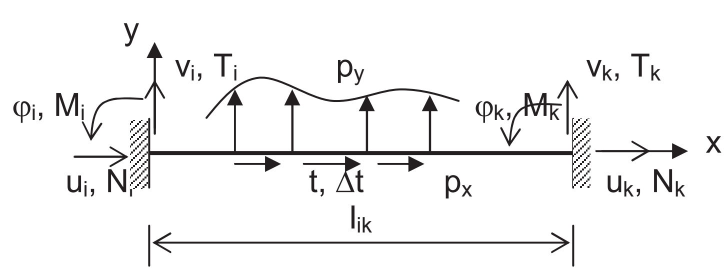
Vodeći računa o pozitivnoj konvenciji za sile, dobija se da je vektor ekvivalentnog opterećenja :

$$Q_t=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{bmatrix}_t=EI\alpha_t\frac{\Delta t}{h}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \tag{27}$$

Ukoliko na štap djeluje neko drugo opterećenje postupak određivanja komponenti vektora ekvivalentnog opterećenja ostaje nepromijenjen. U literaturi se mogu naći tabele sa sračunatim vrijednostima reakcija za razne slučajeve opterećenja.

2.3.3. Matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja ravnog prizmatičnog štapa

Ravni štap može da primi i prenese spoljašnje uticaje koji djeluju u pravcu ose štapa p_x kao i opterećenje upravno na osu štapa p_y, temperaturnu promjenu u osi štapa t i temperaturnu razliku Δt duž ose štapa, slika 14.



Slika 16.

Pošto spoljašnji uticaji predstavljaju zbir uticaja koji se javljaju u slučaju aksijalnog naprezanja i u slučaju savijanja slijedi da se matrica krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja ravnog štapa mogu dobiti superpozicijom matrica krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja za aksijalno naprezanje štapa i savijanje.

Štap u ravni ima šest stepeni slobode, po tri u svakom čvoru, što je jednako zbiru stepeni slobode aksijalnog naprezanja i savijanja:

$$k_{aks} = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k_{sav} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Slika 17.

Vodeći računa o oznakama generalisanih sila i generalisanih pomjeranja 1,…,6 koje su date na slici 17, postavljajući u matrici krutosti svaki od članova na odgovarajuće mjesto dobija se matrica krutosti štapa:

$$k = k_{aks} + k_{sav} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Superpozicijom vektor ekvivalentnog opterećenja štapa i-k u ravni definisan je sa :

$$Q = Q_{aks} + Q_{sav} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_5 \\ Q6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}_{o,t} = -\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \tag{29}$$